Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Septiembre - Diciembre 2000

Nombre: ______________________

Carnet: ____________ Sección: ____

MA-3111—Primer Parcial —

1. (6 pts.) Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 + \frac{2x}{\pi} & \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 1 - \frac{2x}{\pi} & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si} \quad x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

   a) Graficar f

   b) Graficar f'_{gen}

   c) Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx$.

Tabla

$u(t)$	$U(z)$
$u'_{gen}(t)$	$zU(z)$
$tu(t)$	$-U'(z)$
$u(t-a)$	$e^{-az}U(z)$
$e^{at}u(t)$	$U(z-a)$
$u * v$	UV
$H(t)$	$\frac{1}{z}$
$\operatorname{sen} at$	$\frac{a}{z^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{z}{z^2+a^2}$
δ_0	1

2. (8 puntos)

   a) Si K_1 y K_2 son funciones generalizadas de dominio un espacio V de funciones de prueba, explicar lo que significa $K_1 = K_2$.

   b) Probar que si $f(t)$ es una función continua en el punto a, entonces $f(t)\delta_a = f(a)\delta_a$

   c) Probar que $((1+x^2)\delta - 1)' = 2\delta'_1$

   Nota: δ_a y $\delta(t-a)$ son sinónimos.

3. (8 puntos) Considerar el siguiente problema:

$$\begin{aligned} ty'' + 2ty' - 2y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

   Sea $u = H(t)y(t)$, donde $H(t)$ denota la función escalonada de Heaviside:
   $H(t) = 1$ si $t \geq 0$, y 0 en caso contrario.

   a) Probar que $tu''_{gen} + 2tu'_{gen} - 2u = 0$

   b) Sea $U(z)$ la transformada de Laplace de $u(z)$. Probar $\dfrac{U'(z)}{U(z)} = \dfrac{-2}{z}$

   c) Resolver esta ecuación diferencial para $U(z)$.
   Ayuda: el lado izquierdo es $\dfrac{d \ln U(z)}{dz}$.

   d) Hallar $u(t)$ a partir de $U(z)$.

4. (8 puntos) Hallar las antitransformadas de Laplace de las siguientes:

a) $\dfrac{z^2 e^{-5z}}{z^2-9}$; *b*) $\dfrac{z}{z^2+a^2}$; *c*) $\dfrac{1}{z^2+a^2}$.